ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δώσετε τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού α.

Μονάδες 7

Α2. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$, να αποδείξετε ότι για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ισχύει:

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Μονάδες 8

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. $d(x,-2)=|x-2|$

ii. $|\alpha|+|\beta|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

iii. Η εξίσωση $x^2=-\alpha$ είναι αδύνατη για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

iv. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έχει πάντοτε πραγματικές λύσεις αν η διακρίνουσα είναι μη αρνητική.

v. Για κάθε $\alpha,\beta\geq 0$ ισχύει: $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

Β1. Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$

Μονάδες 12

Β2. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}.$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A=(\sqrt{20}-\sqrt{27})(\sqrt{45}-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{12})$$

$$B=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{29}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{29}+\sqrt{2}}$$

Μονάδες 10

Γ2. Να ρητοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{3}{\sqrt{-A}-\sqrt{B+1}},$$

όπου A, B οι τιμές από το Γ1 ερώτημα.

Μονάδες 8

Γ3. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=3.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$

Δ1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

Μονάδες 10

Δ2. Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του $\lambda > 0$ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

Μονάδες 8

iii. Για την τιμή του $\lambda > 0$ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 3

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 70 Σχολικό Βιβλίο.

Α2. Σελίδα 90 Σχολικό Βιβλίο.

Α3.
- i. Λ
- ii. Λ
- iii. Λ
- iv. Σ
- v. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -1<x<5$

Β2. Από Β1 ερώτημα έχουμε ότι: $x>-1 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow |x+1|=x+1$

Αντίστοιχα, $x<5 \Leftrightarrow x-5<0 \Leftrightarrow |x-5|=-x+5$

Άρα,

$$K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}=\frac{x+1-x+5}{3}=\frac{6}{3}=2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $A=\left(\sqrt{20}-\sqrt{27}\right)\left(\sqrt{45}-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)=\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)=$
$=\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{3}\right)=\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2=20-27=-7.$

$B=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{29}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{29}+\sqrt{2}}=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{29}-\sqrt{2})(\sqrt{29}+\sqrt{2})}=\sqrt[4]{3}\cdot$
$\sqrt[4]{\left(\sqrt{29}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{81}=3$

Γ2. $\frac{3}{\sqrt{-A}-\sqrt{B+1}}=\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{4}}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}=(\sqrt{7}+2)$

Γ3. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}}+\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}}+\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}}=$
$\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{4}}+\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{4}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6}{2}=3.$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\qquad \lambda>0$$

Δ1. $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=(\lambda^2-1)^2\geq 0.$ Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda>0$.

Από τους τύπους του Vietta έχουμε:

$$S=x_1+x_2=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\text{ και }P=x_1\cdot x_2=\frac{\lambda}{\lambda}=1.$$

Επειδή το γινόμενο είναι θετικός αριθμός και το άθροισμα θετικός αριθμός ($\lambda^2+1>0$ και $\lambda>0$) το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

Δ2. i. $E = x_1 \cdot x_2 = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$.

ii. $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$

$\Pi \geq 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 4 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 \geq 4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$

Ισχύει.

iii. $\Pi = 4 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Για $\lambda = 1$ είναι $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Οι ρίζες του είναι $x_1 = x_2 = 1$

Στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.